Über die fixpunktfreien Abbildungen der Ebene.

Von B. von Kerékjártó in Szeged (Ungarn).

Unter demselben Titel hat neulich Herr E. Sperner einige Untersuchungen veröffentlicht.[1]) Da die Arbeit von Herrn Sperner zu Mißverständnissen Anlaß geben könnte, scheint es mir notwendig einige Punkte aufzuklären.

In §§ 1—3 beabsichtigt Herr Sperner einen Ersatz für den klassischen Translationssatz von Brouwer zu geben; er beweist nämlich, daß es zu jeder fixpunktfreien, den Umlaufssin erhaltenden topologischen Abbildung der Ebene auf sich für jeden Punkt der Ebene ein diesen Punkt enthaltendes *maximales freies Gebiet*[2]) konstruiert werden kann.[3]) Dieser Satz hat mit dem Brouwerschen Translationssatz nichts zu tun, wie ich es durch zwei Bemerkungen erklären werde. *Erstens* bildet das Gebiet, begrenzt von den Linien

$$y = \pm 1, \quad -1 \leqq x \leqq 1,$$
$$x = \pm \frac{1}{2} + \frac{y}{2} \sin \frac{1}{1-|y|}, \quad -1 < y < 1,$$

ein maximales freies Gebiet für die Parallelverschiebung $x' = x + 1$, $y' = y$; es ist das topologische Bild eines Parallelstreifens; dessen Existenz besagt aber garnichts über die Struktur der Abbildung. *Zweitens* gilt derselbe Satz für irgendeinen nicht invarianten Punkt

---

[1]) *Hamburger Mathematische Einzelschriften*, 14. Heft (1933), S. 1–47.

[2]) Unter einem *freien Gebiet* wird ein solches Gebiet verstanden, welches mit seinem Bild keinen Punkt gemeinsam hat; unter einem *maximalen* ein solches, welches in keinem freien Gebiet als echter Teil enthalten ist.

[3]) Eine im *Zentralblatt für Mathematik*, 7 (1933), S. 231 erschienene Besprechung des Spernerschen Aufsatzes identifiziert sogar irrtümlicher Weise diesen Satz mit dem Translationssatz von Brouwer!

einer beliebigen topologischen Abbildung des n-dimensionalen Raumes auf sich, und kann etwa folgendermaßen bewiesen werden. Sei P_1 der gegebene nicht invariante Punkt, den nehmen wir als Anfangspunkt eines Koordinatensystems; seien $P_1, P_2, \ldots$ die rationalen Punkte des Raumes. Um P_1 nehmen wir die Kugel K_1 mit größtem Radius, deren Inneres ein freies Gebiet ist. Sei P_{α_2} der Punkt mit kleinstem Index, der im Innern von K_1 liegt; um P_{α_2} legen wir die Kugel K_2 mit größtem Radius von der Art, daß die im Innern von K_1+K_2 liegenden Punkte ein freies Gebiet bilden; usw. Das erhaltene Gebiet ist ein maximales freies Gebiet, das den gegebenen Punkt P_1 enthält.

Für den dreidimensionalen Raum gibt es aber kein Analogon zum Brouwerschen Translationssatz. Die folgende fixpunktfreie, den Umlaufssinn erhaltende Abbildung kann in keiner Hinsicht als mit einer Translation verwandt angesehen werden:

$$x' = -x, \quad y' = -y, \quad z' = \begin{cases} z \text{ für } x^2+y^2 \geqq 1, \\ z+(x^2+y^2-1) \text{ für } x^2+y^2 \leqq 1 \end{cases}$$

(x, y, z cartesische Koordinaten).

Im Äußeren des Zylinders $x^2+y^2=1$ ist die Abbildung sogar involutorisch.

Bei dem Translationssatz von BROUWER ist die Tatsache am wichtigsten, daß ein maximales freies Gebiet derart konstruiert werden kann, daß sein Rand von *einfachen offenen Linien* gebildet wird.

Projiziert man die Ebene stereographisch auf eine Kugel, so erhält man eine den Umlaufssinn erhaltende Abbildung der Kugel auf sich mit einem einzigen Fixpunkt U. Das Translationsfeld von BROUWER wird als ein maximales freies Gebiet erscheinen, dessen Rand aus zwei durch den Punkt U laufenden *einfachen geschlossenen Kurven* besteht.

In einer Arbeit habe ich den *Brouwerschen Translationssatz* und den *Poincaréschen Fixpunktsatz* mittels einer einheitlichen Methode bewiesen[4]); die Konstruktion, die ich angebe, versichert, daß das erhaltene maximale freie Gebiet auf der Kugel von einfachen geschlossenen Kurven berandet wird; so verstehe ich unter einem *Transformationsfeld* ein solches maximales freies Gebiet,

[4]) B. DE KERÉKJÁRTÓ, The plane translation theorem of Brouwer and the last geometric theorem of Poincaré, *diese Acta,* 4 (1928), p. 86—102.

von welchem zufolge meiner Konstruktion feststeht, daß seine Berandung aus einfachen geschlossenen Kurven besteht. Über ein solches Transformationsfeld kann man im Falle einer beliebigen geschlossenen orientierbaren Fläche einige allgemeine Resultate bestimmen, worauf ich demnächst zurückkehren werde; so die folgenden Sätze: ein Transformationsfeld bestimmt auf der Fläche höchstens zwei Restgebiete; wenn es auf der Fläche zwei Restgebiete ohne gemeinsamen Randpunkt bestimmt, so ist das Transformationsfeld, ebenso wie das von den iterierten Bildern des Transformationsfeldes gebildete Gebiet, einem ebenen Kreisring homöomorph.

Der Begriff eines freien Gebietes, das in keinem freien Gebiet als echter Teil enthalten ist, wurde bereits in der ersten Veröffentlichung von BROUWER über diesen Gegenstand[5]) als nutzlos bei seite gestellt; da BROUWER für seine Konstruktion die allgemeinen Kontinua benutzte, versuchte er den genannten Begriff durch einen effektiveren zu ersetzen. (Vgl. a. a. O. [5]), insbesondere S. 107.)

In § 4 seiner Arbeit gedenkt Herr SPERNER sich neuen Fragen zuzuwenden, indem er eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür bestimmt, daß eine topologische Abbildung der Ebene einer Parallelverschiebung homöomorph sei. In 1925 habe ich diese Frage gelöst, im Anschluß an eine Untersuchung der Bahnkurven von eingliedrigen kontinuierlichen Gruppen der Ebene.[6]) Mein Satz lautet:

Eine topologische, den Umlaufssinn erhaltende Abbildung der Ebene auf sich ist dann und nur dann einer Parallelverschiebung homöomorph, wenn sie fixpunktfrei ist und ihre Potenzen eine (im Sinne der sphärischen Metrik) gleichmäßig stetige Folge von Transformationen bilden.

Die Bedingung, die Herr SPERNER — offenbar unabhängig von meiner Arbeit — gefunden hat ist die: *Jedes beschränkte Gebiet soll höchstens endlich viele von seinen iterierten Bildern treffen.*

---

[5]) L. E. J. BROUWER, Over één-éénduidige continue transformaties van oppervlakken in zichzelf (2-de mededeeling), *Verslag Kon. Akad. v. Wet. Amsterdam*, 1909, p. 106–117.

[6]) B. DE KERÉKJÁRTÓ, On a geometrical theory of continuous groups. I. Families of path-curves of continuous one-parameter groups of the plane, *Annals of Math.*, (2) 27 (1925), p. 105—117.; vgl. insbesondere p. 117.

Aus der Spernerschen Bedingung folgt die meinige auf die folgende, fast evidente Weise. Sei ε eine beliebige positive Zahl; sei G das Gebiet bestehend aus allen Punkten der Ebene, deren sphärischer Abstand von dem unendlichfernen Punkt U größer als $\varepsilon/2$ ist. Seien $k = k_1, k_2, \ldots, k_r$ diejenigen Exponenten, für welche $t^k(G)$ und G sich treffen. Die anderen Bilder $t^l(G)$ $(l \neq k_1, k_2, \ldots, k_r)$ treffen G nicht, liegen also in der $\varepsilon/2$-Umgebung von U, sie haben also sphärische Durchmesser $< \varepsilon$. Sei P ein beliebiger Punkt von G, sei $\delta > 0$ so gewählt, daß die δ-Umgebung von P bei $t^{k_1}, t^{k_2}, \ldots, t^{k_r}$ in Gebiete von sphärischem Durchmesser $< \varepsilon$ übergehe. Für die so bestimmte Zahl δ ist also folgende Bedingung der gleichmäßigen Stetigkeit erfüllt: wenn Q ein beliebiger Punkt ist, dessen Abstand von P kleiner als δ ist, so ist für jedes n der sphärische Abstand von $t^n(P)$ und $t^n(Q)$ kleiner als ε.

Die von Herrn SPERNER gefundene Charakterisierung der Parallelverschiebungen ist also mit der meinigen äquivalent. Ich muß jedoch betonen, daß die Spernersche Bedingung an und für sich wertvoll ist und für weitere Zwecke angewendet werden kann, insbesondere wenn man sie auf hinreichend kleine Gebiete beschränkt. Die Bemerkung von Herrn SPERNER (a. a. O. [1]), S. 3–4) laut deren die Abbildungen einer einfach transitiven kontinuierlichen Gruppe der Ebene seiner Bedingung genügen, nebst dem eleganten Beweis, ist ebenfalls interessant. Der von mir aufgestellten schwächeren Bedingung betreffend die gleichmäßige Stetigkeit der Potenzen (indem man dieselbe mit Hilfe des Umgebungsbegriffes formuliert) genügen die Abbildungen einer beliebigen einfach transitiven kontinuierlichen Gruppe.

Mein in 1925 gegebener Beweis stützt sich auf die ihm vorangehenden Resultate über kontinuierliche Gruppen, und auf den Brouwerschen Translationssatz. Auf den folgenden Seiten gebe ich einen anderen, unabhängigen Beweis, der im Grundgedanken mir seit fast derselben Zeit bekannt war. Die Mitteilung dieses Beweises scheint mir deshalb wünschenswert, da der Spernersche Beweis unnötigerweise kompliziert ist.

Definitionen und Hilfssätze.

Sei t eine topologische Abbildung der Ebene auf sich mit erhaltendem Umlaufssinn und ohne Fixpunkt.

Unter einem *freien Bogen* verstehen wir einen einfachen Bogen, der mit seinem Bild keinen Punkt gemein hat.

Unter einem *Translationsbogen* verstehen wir einen einfachen Bogen AA', dessen Endpunkt A' Bild des Anfangspunktes A ist, und welcher mit seinem Bild außer A' keinen Punkt gemein hat.

Die bei den Potenzen $t^n (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ entstehenden Bilder eines Translationsbogens bilden eine Kurve, die als *Bahnkurve* bezeichnet wird.

1. *Durch jeden Punkt, und auch durch jeden freien Bogen läßt sich ein Translationsbogen, also auch eine Bahnkurve legen.*

Beweis (nach TERASAKA[7]). Um jeden Punkt des freien Bogens PQ legen wir den Kreis mit Radius ϱ; ihre inneren Punkte bilden ein Gebiet g_ϱ mit lauter erreichbaren Randpunkten. Wenn $\varrho (> 0)$ sehr klein ist, trifft g_ϱ sein Bild g'_ϱ nicht; für einen hinreichend großen Wert von ϱ trifft g_ϱ sein Bild g'_ϱ. Es gibt also einen Wert von ϱ, für welchen g_ϱ und g'_ϱ wenigstens einen Randpunkt A', aber keinen inneren Punkt gemein haben. Sei A das inverse Bild von A'; verbinden wir A mit P, und Q mit A' durch Bögen in g_ϱ, die mit PQ zusammen einen einfachen Bogen AA' bilden; AA' ist ein Translationsbogen, der den vorgelegten freien Bogen PQ als Teil besitzt.

2. *Jede Bahnkurve ist eine einfache* (d. h. doppelpunktfreie) *Kurve.*

Für den Beweis dieses Satzes mittels Arcusvariation, s. BROUWER[8]), KERÉKJÁRTÓ[9]); einen anderen Beweis gibt SPERNER[10]).

3. *Die iterierten Bilder $P, P^1, P^2, \ldots$ eines beliebigen Punktes P konvergieren gegen Unendlich.*[11])

---

[7]) H. TERASAKA, Ein Beweis des Brouwerschen ebenen Translationssatzes, *Japanese Journal of Math.*, **7** (1930), S. 61—69; vgl. insbesondere S. 62.

[8]) L. E. J. BROUWER, Beweis des ebenen Translationssatzes, *Math. Annalen*, **72** (1912), S. 37—54; vgl. Satz 1, auf S. 38.

[9]) vgl. meine unter [4]) zitierte Arbeit, theorem 1, auf S. 90. Dort beweise ich nur, daß ein Translationsbogen AA' und seine bei t und t^2 entstehenden Bilder $A'A^2$ und A^2A^3 zusammen einen einfachen Bogen AA^3 bilden; für meine dortige Methode ist nämlich der weitere Verlauf der Bahnkurve belanglos. Der auf S. 90 gegebene Beweis, wörtlich angewendet, ergibt aber auch den Satz, daß n aufeinander folgende Bilder eines Translationsbogens einen einfachen Bogen bilden, m. a. W. daß die Bahnkurve keinen Doppelpunkt hat.

[10]) vgl. die unter [1]) zitierte Arbeit, Satz 4., auf S. 9.

[11]) s. die unter [8]) zitierte Arbeit von BROUWER, Satz 8., S. 45.

Beweis. Wäre nämlich Q ein im Endlichen liegender Häufungspunkt der Folge, so legen wir in einer hinreichend kleinen Umgebung von Q einen freien Bogen, der durch zwei Punkte P^k und P^l der Folge läuft; durch diesen legen wir einen Translationsbogen AA'; das Bild desselben bei t^{k-l} würde den Bogen AA' treffen in Widerspruch zu 2.

Charakterisierung der ebenen Parallelverschiebungen.

Projizieren wir die Ebene stereographisch auf die Einheitskugel, so entspricht der Abbildung t eine Abbildung der Kugel mit einem einzigen Fixpunkt U.

Unter dem *sphärischen Abstand* von zwei Punkten der Ebene verstehen wir den sphärischen Abstand der ihnen auf der Kugel entsprechenden Punkte.

Nehmen wir an, daß *die Potenzen der Abbildung t eine gleichmäßig stetige Folge bilden.* Darunter verstehen wir folgendes: zu jedem Punkt $P(\neq U)$ und zu jeder positiven Zahl ε läßt sich eine positive Zahl δ bestimmen von der Art, daß für einen beliebigen Punkt Q, dessen Abstand von P kleiner als δ ist, und für jedes n, die Bilder P^n und Q^n einen sphärischen Abstand $< \varepsilon$ voneinander haben.

Unter dieser Bedingung ergeben sich die folgenden Sätze.

4. *Jede Bahnkurve ist eine einfache offene Linie in der Ebene* (d. h. nach Hinzufügung von U eine einfache geschlossene, durch den Fixpunkt U laufende Kurve auf der Kugel).

Wäre nämlich $Q(\neq U)$ ein nicht zur Bahnkurve $\varkappa$ gehöriger Punkt, gegen den Punkte von $\varkappa$ konvergieren, so sei AA' ein Translationsbogen von $\varkappa$, und sei $\varepsilon > 0$ der (sphärische) Abstand des Bogens AA' von der Punktmenge Q^n $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Sei $\delta > 0$ so gewählt, daß für jeden Punkt P, für welchen $(P, Q) < \delta$, auch $(P^n, Q^n) < \varepsilon$ sei, für jedes n. Sei dann P ein Punkt der Bahnkurve, im Abstand $< \delta$ von Q, und sei P^n das zum Bogen AA' gehörige iterierte Bild von P; P^n und Q^n sind in einem Abstand $> \varepsilon$ voneinander, was ein Widerspruch ist.

Daraus folgt unmittelbar:

5. *Die iterierten Bilder eines beliebigen freien Bogens konvergieren gegen den einzigen Punkt U.*

Nach 1. legen wir durch den freien Bogen λ eine Bahnkurve $\varkappa$; sie ist laut 4. eine einfache geschlossene Kurve durch den Punkt U. Auf ihr liegen sämtliche Bilder λ^n; diese sind paarweise fremd, und liegen auf $\varkappa$ in der natürlichen Reihenfolge. Ein Limespunkt der Bögen λ^n ist ein Fixpunkt von t, so daß er notwendig mit U identisch ist.

6. *Seien $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ endlich viele Bahnkurven, paarweise ohne gemeinsamen Punkt. Durch einen beliebigen Punkt $P (\neq U)$, welcher nicht auf $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ liegt, läßt sich eine Bahnkurve $\varkappa$ konstruieren, die $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ nicht trifft.*

Das von $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ bestimmte, den Punkt P enthaltende Gebiet G geht bei t in sich selbst über, enthält also den Punkt $P' = t(P)$. Sei $w: Q(\lambda)$ $(0 \leqq \lambda \leqq 1)$ ein Bogen, der $P = Q(0)$ und $P' = Q(1)$ verbindet, und die Kurven $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ nicht trifft; sei $\vartheta (> 0)$ sein Abstand von den Kurven $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$. Wählen wir die positive Zahl $\varrho (< \vartheta)$ hinreichend klein, so daß der Kreis um P mit Radius ϱ und dessen Bild sich nicht treffen.

Bezeichne g_τ das Gebiet bestehend aus den Punkten, deren Abstand vom Teilbogen $0 \leqq \lambda \leqq \tau$ von w kleiner als ϱ ist. Für $\tau = 0$ sind g_τ und sein Bild g'_τ fremd, für $\tau = 1$ treffen sie sich. Es gibt also einen Wert von τ, für welchen das Gebiet g_τ und sein Bild g'_τ mindestens einen (notwendig erreichbaren) Randpunkt A', aber keinen inneren Punkt gemein haben. Verbinden wir das inverse Bild A von A' mit A' in g_τ durch einen Bogen AA', so erhalten wir einen Translationsbogen, der die Bahnkurven $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ nicht trifft; auch die von AA' erzeugte Bahnkurve $\varkappa$ kann also die Bahnkurven $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ nicht treffen.

7. Sei D der Bereich bestehend aus denjenigen Punkten, deren Abstand vom Fixpunkt U größer oder gleich η ist. Bezeichne 2ε den kleinsten Abstand eines veränderlichen Punktes von D von seinem bei t entstehenden Bildpunkt.

Seien $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ drei Bahnkurven, die durch D laufen. Setzen wir voraus, daß $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ in D einen Abstand $< 2\varepsilon$ voneinander haben, m. a. W., daß es je einen in D liegenden Punkt von $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ gibt, deren Abstand $< 2\varepsilon$ ist. Sei ferner auch der Abstand von $\varkappa_2$ und $\varkappa_3$ in D kleiner als 2ε. Nun beweisen wir folgende Behauptung:

7.1 *Eine von den drei Bahnkurven $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ trennt die beiden anderen voneinander.*

Verbinden wir in D je einen Punkt von $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ (bzw. von $\varkappa_2$ und $\varkappa_3$) in ihrem Zwischengebiet durch einen Bogen λ_1 (bzw. λ_3) vom Durchmeßer $<2\varepsilon$, der keinen weiteren Punkt mit $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ gemein hat. [Wenn aber etwa λ_1 die Kurve $\varkappa_3$ trifft, so nehmen wir zwei solche Teilbögen λ_1' und λ_3' von λ_1, deren Endpunkte auf $\varkappa_1$ und $\varkappa_3$, bzw. auf $\varkappa_2$ und $\varkappa_3$ liegen und die keinen anderen Punkt mit $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ gemein haben: in der folgenden Überlegung ersetzen wir dann λ_1 und λ_3 durch λ_1' und λ_3', und vertauschen die Rolle von $\varkappa_2$ und $\varkappa_3$]. λ_1 und λ_3 sind freie Bogen. Wenn $\varkappa_2$ die Bahnkurven $\varkappa_1$ und $\varkappa_3$ nicht voneinander trennt, so werden im Zwischengebiet von $\varkappa_2$ und $\varkappa_3$ eine Hälfte $\varkappa_2^*$ von $\varkappa_2$ und die Bahnkurve $\varkappa_1$ voneinander durch λ_3 getrennt. Unter den iterierten Bildern von λ_1 gibt es unendlich viele, deren auf $\varkappa_2$ liegende Endpunkte zu $\varkappa_2^*$ gehören; alle diese treffen den Bogen λ_3, in Widerspruch zu 5.

8. Sei $P_1, \ldots, P_k$ eine endliche Folge von Punkten in D, die in D ε-dicht liegen (jeder Kreis vom Radius ε, dessen Mittelpunkt zu D gehört, soll mindestens einen der Punkte P_i in seinem Innern enthalten); seien ferner $P_{k+1}, \ldots, P_l$ Punkte auf dem Rande von D, die auf dem Rande von D ε-dicht liegen. Konstruieren wir (laut des Satzes 6.) der Reihe nach die Bahnkurve $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_l$, sodaß $\varkappa_i$ durch den Punkt P_{α_i} läuft und die Bahnkurven $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{i-1}$ nicht trifft; P_{α_i} bezeichne den Punkt mit kleinstem Index, der zu keiner der Bahnkurven $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{i-1}$ gehört. — Wenn ein Punkt Q von D im Abstand gleich ε von $\varkappa_i$ liegt, so gibt es einen Punkt P_j im Abstand $<\varepsilon$ von Q, und also eine durch P_j laufende, von $\varkappa_i$ verschiedene Bahnkurve $\varkappa_j$, deren Abstand von $\varkappa_i$ in D kleiner als 2ε ist.

Laut des Satzes 7.1 lassen sich also die Bahnkurven $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_l$ umnumeriert in eine solche Folge $\varkappa_{-r}, \varkappa_{-r+1}, \ldots, \varkappa_{r-1}, \varkappa_r$ ordnen, daß $\varkappa_{i-j}$ und $\varkappa_{i+j'}$ voneinander durch $\varkappa_i$ getrennt werden. Je zwei aufeinander folgende Kurven $\varkappa_i$ und $\varkappa_{i+1}$ haben in D einen Abstand $<2\varepsilon$; sie können also durch einen in ihrem Zwischengebiet und zugleich in D verlaufenden Bogen λ_i vom Durchmesser $<2\varepsilon$ verbunden werden; λ_i ist ein freier Bogen. Natürlich läßt sich dann ein beliebiger Punkt von $\varkappa_i$ mit einem Punkt von $\varkappa_{i+1}$ durch einen freien Bogen im Zwischengebiet von $\varkappa_i$ und $\varkappa_{i+1}$ verbinden, nämlich in dem Teilgebiet desselben, welches durch zwei sukzessive Bilder von λ_i bestimmt ist.

9. Modifizieren wir $\varkappa_r$ (und $\varkappa_{-r}$) auf die folgende Weise. Sei b ein Bogen des Randes von D, dessen Endpunkte zu $\varkappa_r$ gehören und welcher im Inneren von $\varkappa_r$ (d. h. in dem von $\varkappa_r$ bestimmten, die anderen Kurven $\varkappa_i$ nicht enthaltenden Gebiet) liegt. Durch diesen Bogen b, dessen Durchmesser laut Konstruktion kleiner als ε ist, der also ein freier Bogen ist, ersetzen wir den zwischen denselben Endpunkten liegenden Teilbogen b^* von $\varkappa_r$; und durch die Bilder von b, die Bilder von b^*. Indem wir diese Modifizierung für jeden Bogen b durchführen (wir dürfen annehmen, daß deren Anzahl endlich ist[12])), entsteht eine Bahnkurve, die wir wieder mit $\varkappa_r$ (bzw. $\varkappa_{-r}$) bezeichnen; diese hat keinen Punkt im Inneren von D, liegt also im Abstand $<\eta$ von U. Auch die modifizierte Kurve $\varkappa_r$ und $\varkappa_{r-1}$ lassen sich durch einen freien Bogen in ihrem Zwischengebiet in D verbinden.

10. Ersetzen wir η durch $\eta_1 = \eta/2$; D_1 und ε_1 sollen die analogen Bedeutungen haben, wie in 7. Die zum Innern von $\varkappa_r$, bzw. von $\varkappa_{-r}$ gehörenden Teilbereiche von D_1 bedecken wir mit Punkten, ε_1-dicht; durch diese legen wir Bahnkurven $\varkappa_{r+1}, \varkappa_{r+2}, \ldots, \varkappa_{r_1}$, bzw. $\varkappa_{-r-1}, \varkappa_{-r-2}, \ldots, \varkappa_{-r'_1}$, die einander und $\varkappa_r$, $\varkappa_{-r}$ nicht treffen. Wieder modifizieren wir $\varkappa_{r_1}$ und $\varkappa_{-r'_1}$, wie in 9., usw.

11. Auf diese Weise fortfahrend erhalten wir eine in beiden Richtungen unendliche Folge von Bahnkurven $\ldots, \varkappa_{-n}, \varkappa_{-n+1}, \ldots \varkappa_{n-1}, \varkappa_n, \ldots$ folgender Eigenschaft: sie sind paarweise fremd; $\varkappa_i$ trennt $\varkappa_{i-j}$ und $\varkappa_{i+j'}$ voneinander; $\varkappa_n$ konvergiert gegen den einzigen Punkt U (für $n \to \infty$, und für $n \to -\infty$); $\varkappa_n$ und $\varkappa_{n+1}$ können durch einen freien Bogen λ_n in ihrem Zwischengebiet verbunden werden. Indem wir die Bögen λ_n so wählen, daß die auf $\varkappa_n$ liegenden Endpunkte von λ_{n-1} und λ_n zusammenfallen, erhalten wir in $\Sigma \lambda_n = a$ eine durch den Punkt U laufende einfache geschlossene Kurve, die mit ihrem Bild a' außer U keinen Punkt gemeinsam hat. *Die Kurven a und a' beranden ein Translationsfeld, dessen iterierte Bilder die ganze Kugelfläche bedecken.*

Damit ist bewiesen, daß die Abbildung t einer gewöhnlichen Parallelverschiebung $x' = x + 1$, $y' = y$ homöomorph ist.

Szeged, den 6. Dezember 1933.

(Eingegangen am 20. Dezember 1933.)

---

[12]) vgl. B. von Kerékjártó, *Vorlesungen über Topologie* (Berlin, 1923), S. 89.